Übungen zur Mathematik II für Studierende der Informatik

A. Blunck, W. Huang, R. Stanik

SoSe 2006 **Blatt 6**

A: Präsenzaufgaben am 11.05.2005

1. Beweise: $(\sinh x)' = \cosh x, \ \ (\cosh x)' = \sinh x$
2. Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2x^2 + 3$. Berechne den Inhalt der Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt.
   Verwende dazu Obersummen sowie die Formel $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. Integriere:

$$\int_1^4 2x dx, \qquad \int_0^3 2x^2 dx, \qquad \int_0^4 2 dx, \qquad \int_0^3 e^x dx.$$

B: Übungsaufgaben zum 18.05.2005

1. Beweise:

$$a) \quad (\tanh x)' = 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$$
$$b) \quad (\coth x)' = 1 - \coth^2 x = -\frac{1}{\sinh^2 x}$$

2. Berechne die Fläche, die von dem Graphen der Funktion $f(x) = x^3$, der x-Achse und der Geraden $x = 2$ eingeschlossen wird, als Grenzwert einer Folge von Obersummen. (Hinweis: Man verwende die Formel $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$).
3. Integriere (mit Begründung):

$$\int_1^4 \sqrt{x} dx, \qquad \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx, \qquad \int_0^4 e^{-x} dx,$$
$$\int_1^3 \frac{1}{1+x} dx, \qquad \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \cos x dx, \qquad \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

4. Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

   Zeige mit Hilfe der Definition der Integrierbarkeit, dass f auf $[0,1]$ nicht integrierbar ist. Wähle dazu zunächst Zwischenpunkte $\xi_i \in \mathbb{Q}$ und anschließend Zwischenpunkte $\xi_i \notin \mathbb{Q}$ (in jedem Intervall $[x_{i-1}, x_i]$ liegen sowohl Elemente von $\mathbb{Q}$ als auch Elemente von $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).