Übungen zur Mathematik II für Studierende der Informatik

A. Blunck, W. Huang, R. Stanik

SoSe 2006 **Blatt 11**

A: Präsenzaufgaben am 29.6.2006

1. Wahr oder falsch? Begründung?
   a) $\det(\lambda A) = \lambda \det A$
   b) $\det(AB) = \det A \cdot \det B$
   c) $\det(A + B) = \det A + \det B$
   d) $\det(A^2) = (\det A)^2$

2. Die reelle 3×3-Matrix A sei gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

   Sei $b = b_A$ die zu A gehörige Bilinearform auf $V = \mathbb{R}^3$, also $b(x, y) = xAy^T$.

   Berechnen Sie $b(v, w)$, $b(u, z)$ und $b(z, z)$ für $v = e_1 = (1, 0, 0)$, $w = e_3 = (0, 0, 1)$, $u = (1, 2, 3)$, $z = (-1, -1, 1)$.

   Prüfen Sie, ob b symmetrisch und positiv definit ist.

B: Übungsaufgaben zum 6.07.2006

1. Man berechne die Determinante von $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$ mit

$$a_{ij} := \begin{cases} 0 & \text{falls } i = j \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

   Hinweis: Man addiere zunächst jede der ersten $n - 1$ Zeilen zur letzten Zeile; danach stelle man durch bestimmte Spaltenumformungen eine obere Dreiecksmatrix her.

2. Welche der folgenden Matrizen sind positiv definit (negativ definit, indefinit) ? (Jeweils mit Beweis.)

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

3. Man zeige, dass durch die folgende Festsetzung ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ definiert wird: Für $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ sei

$$< x, y >:= x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 3 x_2 y_2 .$$

   Man gebe ferner eine symmetrische Matrix A an, so dass $< x, y >= b_A(x, y) = xAy^T$ ist.

4. Wir betrachten $\mathbb{R}^3$ versehen mit dem Standard-Skalarprodukt.

   a) Es sei $a_1 = (1, 2, 3)$, $a_2 = (4, 1, -2)$, $a_3 = (2, 2, 5)$
      Für welche i, j gilt $a_i \perp a_j$?

   b) Es sei $u = (2, 0, 0)$, $v = (-2, 2, 0)$, $w = (2, -1, 3)$, $z = (1, 2, -1)$.
      Man berechne die Öffnungswinkel $\alpha(u, v)$ und $\alpha(w, z)$ (siehe Skript S. 151; Sie dürfen einen Taschenrechner verwenden).