

Übungen zur Vorlesung „Mathematik II für Studierende der Informatik (Analysis und Lineare Algebra)“

T. Andreae, R. Stanik, K. Taubert

SS 2007

Blatt 1

A: Präsenzaufgaben am 5.4.2007

1. Geben Sie ein Beispiel für $<$ und $=$ in Satz 2 (4) (Skript S. 5).
2. Für welche reellen Zahlen a und b gilt $ab > a$?
3. Man ordne die Zahlen $\frac{17}{19}, \frac{6}{7}, \frac{73}{63}, \frac{22}{19}$ der Größe nach.
4. Man zeige, dass für reelle Zahlen x, y die Ungleichung

$$\frac{x^2 + y^2}{2} \geq \left(\frac{x + y}{2}\right)^2$$

gültig ist. Für welche x, y gilt Gleichheit?

5. Bestimmen Sie alle reellen Zahlen x , welche der folgenden Beziehung genügen:

$$0 \leq |2 + x| \leq \frac{1}{3}.$$

6. Die Folge (a_n) sei definiert durch $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2}$. Es sei $a = 0$.
 - a) Zeigen Sie durch direktes Zurückführen auf die Definition der Konvergenz (Skript S. 6, Definition 1), dass (a_n) gegen a konvergiert.
 - b) Man gebe jeweils zu $\varepsilon = 0.1, \varepsilon = 0.01$ und $\varepsilon = 10^{-100}$ ein N an, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für all $n \geq N$ gilt.

B: Übungsaufgaben zum 12.4.2007

1. a) Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, für die gilt $\frac{2 + |x|}{|x - 3|} < 5$.
b) Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, für die gilt $\frac{1}{|x - 2|} \leq \frac{1}{|x - 3|}$.
2. Mit Hilfe der Dreiecksungleichung zeige man, dass für alle reellen Zahlen x, y die Ungleichung

$$|x + y| \geq ||x| - |y|| \text{ und } |x - y| \geq ||x| - |y||$$

bestehen.

3. \mathbb{C} sei der Körper der komplexen Zahlen. Zeigen Sie: Es ist nicht möglich, auf \mathbb{C} eine Relation $<$ so zu definieren, dass \mathbb{C} ein angeordneter Körper wird.

(Hinweis: Führen Sie einen Widerspruchsbeweis; benutzen Sie, dass $i^2 = -1$ gilt.)

4. a) Die Folge (a_n) sei definiert durch $a_n = \frac{2n}{3n+9}$. Man zeige durch direktes Zurückführen auf die Definition der Konvergenz (Skript S. 6, Definition 1), dass $(a_n) \rightarrow \frac{2}{3}$ gilt.

b) Die Folge (b_n) sei definiert durch $b_n = (-1)^n$. Man zeige unter Verwendung der Definition der Konvergenz, dass es kein $a \in \mathbb{R}$ gibt, für das $b_n \rightarrow a$ gilt.

c) Was ist von folgender „Variante“ der Definition der Konvergenz zu halten: Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen *konvergiert gegen eine reelle Zahl a* , wenn es eine reelle Zahl $\varepsilon > 0$ und ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ gilt.