Übungen zur Vorlesung "Diskrete Mathematik" für Studierende der Informatikstudiengänge

T. Andreae, A. Blunck, H. Kiechle, M. Kriesell, P. Reuter.

WS 05/06 **Blatt 12**

A: Präsenzaufgaben am 26.01.2006

1. Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch $f(x_1, x_2) = (x_2, x_1^2)$. Handelt es sich um eine lineare Abbildung?

2. Es sei $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit $f(1, 0, 0) = (1, 2)$, $f(0, 1, 0) = (-1, 0)$ und $f(0, 0, 1) = (3, 1)$. Man berechne $f(v)$ für $v = (-3, 7, 5)$.

3. Es sei $f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ die zu der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ gehörige lineare Abbildung. Man gebe n und m an sowie $f_A(x)$ für $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

4. Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch $f(x_1, x_2) = (x_2, x_1 + 2x_2, 3x_1 - x_2)$. Man gebe die Matrix A an, die zu dieser linearen Abbildung gehört. (Gefragt ist also nach der Matrix A, für die $f_A(x_1, x_2) = f(x_1, x_2)$ für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ gilt.)

B: Übungsaufgaben zum 02.02.2006

1. a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

   Man berechne - falls möglich - die Produkte AB, BA und AC.

   b) Für die obigen Matrizen seien die zugehörigen linearen Abbildungen wie im Skript mit f_A, f_B, ... bezeichnet.
   Man berechne $f_A(4, 2, 4)$, $f_B(1, -7)$, $f_C(0, 0, 1)$ und $f_{BA}(1, 1, 2)$.

2. a) Für jede der folgenden Abbildungen überprüfe man anhand der Definition auf S. 320, ob es sich um eine lineare Abbildung handelt.

   (i) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2) \longmapsto (x_1, x_1(x_1 + x_2))$

   (ii) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)$

   (iii) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (x_1, x_1 + x_3, x_2 + 1)$

   b) Für diejenigen Abbildungen f aus $a)$, die linear sind, gebe man die zugehörige Matrix A an.

   c) Die Abbildung f sei wie oben in (ii) und $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch $(u_1, u_2, u_3) \longmapsto (u_1 + 2u_2 + 3u_3, u_1 - u_3)$. Gib die Matrix an, die zu g gehört, und berechne aus den Matrizen für f und g diejenige Matrix, die zu $g \circ f$ gehört.

3. Es sei $K = \mathbb{Z}_2$ der Körper mit zwei Elementen. Wie viele Abbildungen $f : K^3 \longrightarrow K^2$ gibt es und wie viele davon sind linear? (Hinweis: Man überlege sich zunächst, wie viele Elemente K^n hat. Außerdem gucke man sich noch einmal Satz 1, S. 332 an.)

4. a) Für die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, die durch $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\sum_{i=1}^{4} x_i, \sum_{i=1}^{3} x_i, \sum_{i=2}^{4} x_i \right)$ gegeben ist, bestimme man alle Elemente, die im Kern von f liegen. Welche Dimension besitzt Kern f? Man gebe eine Basis von Kern f an!

   b) Was folgt aus a) für Bild f?