

Übungen zur Vorlesung "Diskrete Mathematik" für Studierende der Informatikstudiengänge

T. Andreae, A. Blunck, H. Kiechle, M. Kriesell, P. Reuter.

WS 05/06

Blatt 5

A: Präsenzaufgaben am 24.11.2005

1. G sei ein ungerichteter Graph mit 100 Knoten. Den Grad 3 haben 50 Knoten, 30 Knoten haben den Grad 4, und die restlichen 20 Knoten haben den Grad 6. Wie viele Kanten besitzt G ?
2. Hat der mittlere der im Skript auf S. 76 dargestellten Graphen
 - a) eine Eulersche Linie?
 - b) einen Hamiltonschen Kreis?
3.
 - a) Man beweise die Aussage (5) (Skript S. 62)
 - b) Man zeige durch Angabe eines Beispiels, dass die Aussage

$$f^{-1}(f(A')) = A'$$

im Allgemeinen nicht gilt.

B: Übungsaufgaben zum 01.12.2005

1.
 - a) Man beweise die Aussage (6) (Skript S. 62)
 - b) Man zeige durch Angabe eines Beispiels, daß die Aussage

$$f(f^{-1}(B')) = B'$$

im Allgemeinen nicht gilt.

- c) Es seien $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$ Abbildungen. Man zeige, dass die folgenden Aussagen gelten:
 - (i) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.
 - (ii) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv.

2. Es sei $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{u, v, w\}$, $C = \{a, b, c, d\}$.
- Die ternäre Relation $R \subseteq A \times B \times A$ sei gegeben durch
 $R = \{(1, v, 2), (2, w, 1), (1, u, 3), (1, v, 3), (3, w, 2), (2, u, 2)\}$.
 Man zeichne den zugehörigen kantenbewerteten gerichteten Multigraphen!
 - Wie viele binäre Relationen gibt es auf A ? (Kurze Begründung!)
 - Gibt es mehr als 2^{50} verschiedene ternäre Relationen auf C ? (Kurze Begründung!)
3. Unter einem *Hyperwürfel* Q_n versteht man den folgenden Graphen:
 Knotenmenge von Q_n ist die Menge aller n -Tupel (x_1, \dots, x_n) mit $x_i \in \{0, 1\}$ ($i = 1, \dots, n$). Zwei Knoten von Q_n sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn sich die entsprechenden n -Tupel an genau einer Stelle unterscheiden.
- Man zeichne die Graphen Q_n für $n = 1, 2, 3, 4$.
 - Wie viele Knoten hat Q_n ?
 - Wie viele Kanten hat Q_n ?
 - Besitzt Q_4 einen Hamiltonschen Kreis?
 (Erläuterung: In b) und c) soll eine Formel für beliebiges n gegeben werden.)
4. B sei ein regulärer ternärer Baum mit p Blättern und n Knoten.
 (B hat also $n - p$ innere Knoten.) Man zeige
- $p = \frac{2n+1}{3}$
 - p ist eine ungerade Zahl
 - Ist h die Höhe von B , so gilt $\lceil \log_3(2n+1) - 1 \rceil \leq h$.
 (Hinweis zu c): $x \leq 3^y \Rightarrow \log_3 x \leq y$