Übungen zur Vorlesung „Diskrete Mathematik“
für Studierende der Informatikstudiengänge

T. Andreae, H.-J. Bandelt, H. Strade

WS 2006/07 **Blatt 4**

A: Präsenzaufgaben am 16.11.2006

1. Es sei $M = \mathcal{P}(\{a, b, c\})$. Man zeichne für die Teilmengenbeziehung $\subseteq$ als Ordnungsrelation auf M das zugehörige Hasse-Diagramm.

2. Man gebe eine Relation auf $\{a, b, c\}$ an, die symmetrisch und transitiv, aber nicht reflexiv ist.

3. Wahr oder falsch:

   a) Es gibt Relationen, die symmetrisch und antisymmetrisch sind.

   b) Die Menge $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist abzählbar.

B: Übungsaufgaben zum 23.11.2006

1. a) Auf der Menge $\mathbb{Z}$ sei eine Relation R erklärt durch $(x, y) \in R \Leftrightarrow xy \geq 0$. Ist R eine Äquivalenzrelation?

   b) Auf der Menge $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ sei eine Relation S erklärt durch $(x, y) \in S \Leftrightarrow xy > 0$. Ist S eine Äquivalenzrelation?

   c) Falls bei a) oder b) eine Äquivalenzrelation vorliegt, so gebe man die zugehörigen Äquivalenzklassen an.

2. Sei $A = \{a, b, c, d\}$. Man gebe – wenn möglich – eine (möglichst einfache) Relation $R \neq \emptyset$ auf A an, die

   a) reflexiv, nicht symmetrisch und transitiv,

   b) reflexiv, symmetrisch und nicht transitiv,

   c) nicht reflexiv, nicht symmetrisch und nicht transitiv,

   d) nicht reflexiv, symmetrisch und nicht transitiv mit $\mid R \mid = 7$,

   e) Äquivalenzrelation und Ordnungsrelation ist.

   (Ohne Beweise)

3. a) Es sei $A = \{a, b, c, d\}$. Man gebe Relationen R, S auf A an, für die gilt:
   R ist eine Äquivalenzrelation mit höchstens 3 Äquivalenzklassen;
   S ist eine antisymmetrische Relation mit $\mid S \mid = 9$;
   $R \cap S$ ist sowohl Äquivalenz- als auch Ordnungsrelation.

   b) Es sei $A = \{a, b, c, d, e\}$; die Relation R auf A sei gegeben durch $R = \{(a, d), (b, c), (c, d), (d, e)\}$.
   Man gebe die transitive Hülle R^+ und die reflexive transitive Hülle R^* von R an.
   (Ohne Beweise)

4. Es sei $A = \{2, 3, 12, 15, 18, 54, 75, 150, 900\}$ und $\leq$ sei die Teilbarkeitsrelation auf A.

   a) Man stelle die partielle Ordnung $(A, \leq)$ durch ein Hasse-Diagramm dar.

   b) Welches sind die maximalen und welches die minimalen Elemente dieser partiellen Ordnung? Gibt es ein Maximum oder ein Minimum von $(A, \leq)$? [1)]

   c) Man gebe für die partielle Ordnung $(A, \leq)$ die oberen und unteren Schranken folgender Mengen an: $B_1 = \{2, 15, 75\}$ und $B_2 = \{12, 18, 150\}$. Welche dieser Mengen besitzt in $(A, \leq)$ ein Supremum (Infimum)? [1)]

[1)] Falls die Objekte, nach denen gefragt wird, nicht existieren, so begründe man mit einer *kurzen Erläuterung*, wieso dies der Fall ist.