

Übungen zur Vorlesung „Diskrete Mathematik“ für Studierende der Informatikstudiengänge

T. Andreae, H. J. Bandelt, H. Strade

WS 06/07

Blatt 5

A: Präsenzaufgaben am 23.11.2006

1. G sei ein ungerichteter Graph mit 100 Knoten. Den Grad 3 haben 50 Knoten, 30 Knoten haben den Grad 4, und die restlichen 20 Knoten haben den Grad 6. Wie viele Kanten besitzt G ?
2. Unter einem *Hyperwürfel* Q_n versteht man den folgenden Graphen:
Knotenmenge von Q_n ist die Menge aller n -Tupel (x_1, \dots, x_n) mit $x_i \in \{0, 1\}$ für $i = 1, \dots, n$. Zwei Knoten von Q_n sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn sich die entsprechenden n -Tupel an genau einer Stelle unterscheiden.
 - a) Man zeichne die Graphen Q_n für $n = 1, 2, 3, 4$.
 - b) Wie viele Knoten hat Q_n ?
 - c) Wie viele Kanten hat Q_n ?Erläuterung: In b) und c) soll eine Formel für beliebiges n gegeben werden.
3.
 - a) Man beweise die Aussage (6) (Skript S. 62).
 - b) Man zeige durch Angabe eines Beispiels, dass die Aussage

$$f(f^{-1}(B')) = B'$$

im Allgemeinen nicht gilt.

B: Übungsaufgaben zum 30.11.2006

1. Es sei $f : A \rightarrow B$ eine Abbildung und es gelte $A_1, A_2 \subseteq A$.
 - a) Man beweise $f(A_1) \setminus f(A_2) \subseteq f(A_1 \setminus A_2)$.
 - b) Man zeige anhand eines Beispiels, dass die Beziehung $f(A_1 \setminus A_2) \subseteq f(A_1) \setminus f(A_2)$ im Allgemeinen nicht gilt.
2. Es sei $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $C = \{a, b, c, d, e\}$.
 - a) Wie viele Elemente besitzt die Menge $A \times B \times C$? (Kurze Begründung!)
 - b) Wie viele binäre Relationen gibt es auf C ? (Kurze Begründung!)
 - c) Die ternäre Relation $R \subseteq A \times B \times A$ sei gegeben durch

$$R = \{(1, \beta, 2), (2, \alpha, 1), (1, \gamma, 3), (2, \gamma, 4), (4, \alpha, 2), \\ (4, \gamma, 2), (3, \alpha, 1), (3, \beta, 2), (3, \gamma, 3), (1, \beta, 1)\}$$

Man zeichne den zugehörigen kantenbewerteten gerichteten Multigraphen!

- d) Man gebe drei Beispiele für eine 4-stellige Relation auf B . Wie viele verschiedene 4-stellige Relationen auf B gibt es? (Kurze Begründung!)

3. Der Graph G bestehe aus zwei Zusammenhangskomponenten G_1, G_2 , wobei G_1 ein vollständiger Graph mit n Knoten und G_2 ein Baum mit ebenfalls n Knoten ist (mit $n \geq 1$). Der Graph H entstehe aus G dadurch, dass man weitere Kanten folgendermaßen zu G hinzufügt: Man verbinde jeden Knoten von G_1 mit jedem Knoten von G_2 durch eine Kante.
- Man zeige, dass H genau $\frac{3n^2+n-2}{2}$ Kanten hat.
 - Man zeige, dass H keine Eulersche Linie besitzt.
 - Man zeige, dass H im Fall $n \geq 2$ immer einen Hamiltonschen Kreis besitzt.
4. Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ sei der Graph G_n wie folgt definiert:
 Knotenmenge von G_n ist die Menge aller n -Tupel (x_1, \dots, x_n) mit $x_i \in \{0, 1\}$ für $i = 1, \dots, n$. Zwei Knoten von G_n sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn sich die entsprechenden n -Tupel an genau zwei Stellen unterscheiden.
- Welchen Grad hat jeder Knoten von G_n ? (Kurze Begründung!)
 - Wie viele Knoten und wie viele Kanten hat G_n ?
 - Man gebe eine (kurze) Begründung, wieso die Graphen G_n für $n \geq 4$ nicht planar sind.